Wirsberg-Gymnasium **Grundwissen Mathematik 9. Jahrgangsstufe**

Lerninhalte	Fakten-Regeln-Beispiele	
Reelle Zahlen	**Defintion der Quadratwurzeln:** Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt. a heißt <u>Radikand</u>. Es gibt Zahlen, die <u>nicht</u> rational sind. ($\sqrt{2}$) **Weitere Beispiele**: a) $\sqrt{625} = 25$, da $25^2 = 625$ b) $\sqrt{-1}$ ist nicht definiert, da -1 negativ ist.	
	Näherungswerte für Quadratwurzeln: a) <u>Intervallschachtelung (IS):</u> Jedes Intervall liegt im vorherigen. Die Intervalllängen werden beliebig klein. Beispiel: IS für $\sqrt{2}$: $1^2 < 2 < 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$; $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 \Rightarrow 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ usw. b) <u>Heron-Algorithmus</u>: Berechnung von $\sqrt{a}$ - Beginne mit einem Rechteck vom Flächeninhalt a, der Breite x_0 und der Länge y_0. - Verwandle das Rechteck in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck mit der neuen Breite x_1 als Mittelwert von x_0 und y_0 und der neuen Länge y_1 als Quotient $a : x_1$. - Wiederhole diesen Schritt mit neuer Breite $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ und neuer zugehöriger Länge $y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$ bis ein zufrieden stellender Näherungswert erreicht ist.	
	Die reellen Zahlen: Zahlen , die sich weder durch endliche noch durch periodische (unendliche) Dezimalbrüche darstellen lassen, heißen <u>irrationale</u> Zahlen. Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge der <u>reellen</u> Zahlen.	
	Rechnen mit Quadratwurzeln: -1- Für alle $a \in R$ gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ Für $a,b \geq 0$ gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($b \neq 0$) **Beispiele:** $\sqrt{5^2} = \lvert 5 \rvert = 5$ $\sqrt{(-5)^2} = \lvert -5 \rvert = 5$ $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9}$ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$	

Binomische Formeln:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

n-te Wurzeln:

Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n -te Potenz a ergibt

Beispiele:

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad$ $\sqrt[5]{10000} = 10$

Gleichung	Lösungsmenge
$x^4 = 11$	$L = \{-\sqrt[4]{11}; \sqrt[4]{11}\}$
$x^3 = -11$	$L = \{-\sqrt[3]{11}\}$

Potenzen mit rationalen Exponenten:

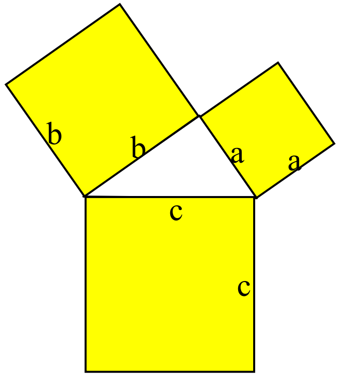
Für positive Grundzahlen a wird vereinbart:

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ und $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ $\quad (p \in Z;\ q \in N)$

Beispiel:

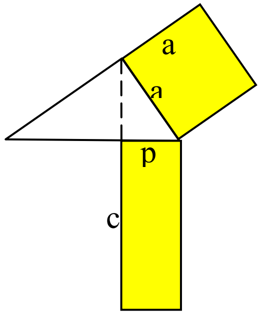
$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = 8$

Die Satzgruppe Des Pythagoras

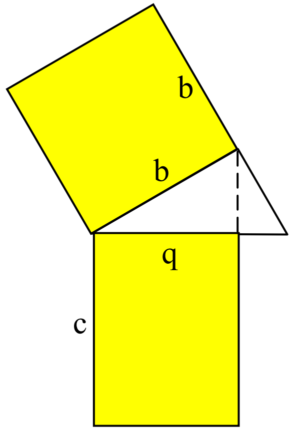


$c^2 = a^2 + b^2$

Satz des Pythagoras

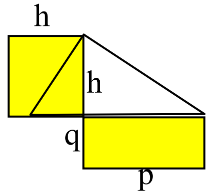


$a^2 = c \cdot p$



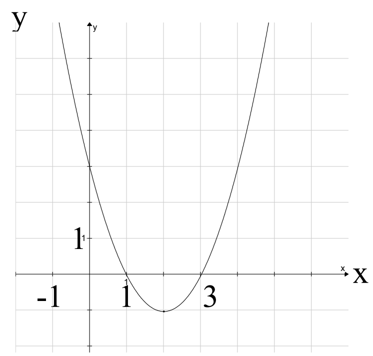
$b^2 = c \cdot q$

Kathetensatz



$h^2 = p \cdot q$

Höhensatz

Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen	**Die quadratische Funktion** Normalform: $p: x \mapsto ax^2 + bx + c$ Scheitelform: $p: x \mapsto a(x+d)^2 + e$ Nullstellenform: $p: x \mapsto a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ **Für alle Formen gilt:** $a > 0$: Parabel nach oben geöffnet $a < 0$: Parabel nach unten geöffnet **Beispiel:** $p: x \mapsto 1\cdot x^2 - 4x + 3$ $p: x \mapsto 1\cdot(x-2)^2 - 1$ $p: x \mapsto 1\cdot(x-3)\cdot(x-1)$  **Die Lösungsformel:** Eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ hat die beiden Lösungen $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, falls $b^2 - 4ac > 0$, genau eine Lösung $x = -\frac{b}{2a}$, falls $b^2 - 4ac = 0$, keine Lösung, falls $b^2 - 4ac < 0$. Der Term $b^2 - 4ac$ heißt <u>Diskriminante</u>.	

Quadratische Funktionen in Anwendungen	**Extremwertprobleme:** Beispiel: Ein Landwirt kauft sich Maschendraht der Länge $81m$. Er möchte damit eine möglichst große rechteckige Fläche einzäunen. Wie muss er die Abmessungen wählen? Lösung: 1. Schritt: Allgemeiner Ansatz für die Größe, die zu maximieren bzw. zu minimieren ist. $A(x,y) = x \cdot y$ 2. Schritt: Aufstellen der Nebenbedingung $2 \cdot (x+y) = 81 \Leftrightarrow y = 40{,}5 - x$ 3. Schritt: Einsetzen der Nebenbedingung in den allgemeinen Ansatz $A(x) = x \cdot (40{,}5 - x) = -x^2 + 40{,}5x$ 4. Schritt: quadratische Ergänzung $A(x) = -x^2 + 40{,}5x$ $A(x) = -[x^2 - 40{,}5x]$ $A(x) = -[x^2 - 40{,}5x] = -\left[x^2 - 40{,}5x + \left(\frac{40{,}5}{2}\right)^2 - \left(\frac{40{,}5}{2}\right)^2\right]$ $A(x) = \quad = -\left[(x - 20{,}25)^2 \quad - \left(\frac{40{,}5}{2}\right)^2\right]$ $A(x) = \quad = -(x - 20{,}25)^2 \quad + 410{,}0625$ 5. Schritt: Antwortsatz schreiben Er muss ein Quadrat mit einer Seitenlänge von $20{,}25m$ wählen.	

Mehrstufiges Zufallsexperiment.

Beispiele für mehrstufige Zufallsexperimente:

- Ein Glücksrad wird fünfmal gedreht und die angezeigte Farbe notiert.
- Aus einer Schachtel, die viele Nägel enthält, werden ohne Zurücklegen 100 Exemplare entnommen und auf ihre Tauglichkeit überprüft.

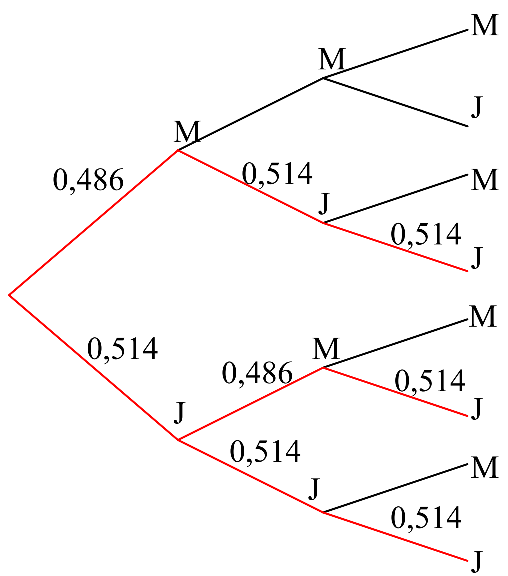
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

Erste Pfadregel:

Man erhält die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses**, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

Zweite Pfadregel:

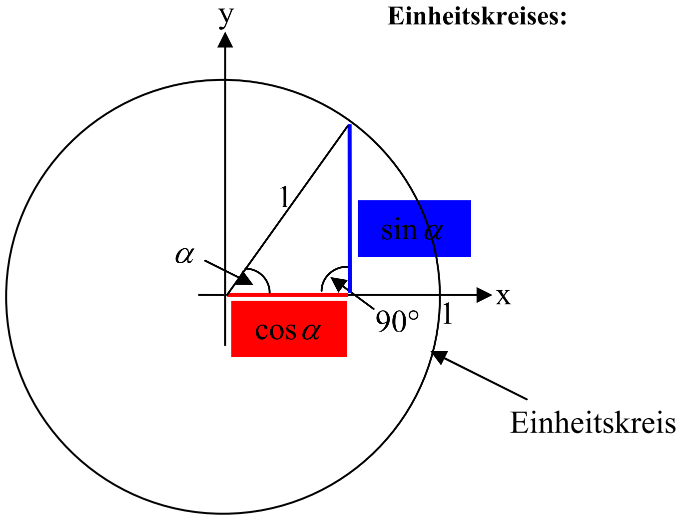
Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade bildet, die zu dem Ereignis gehören.

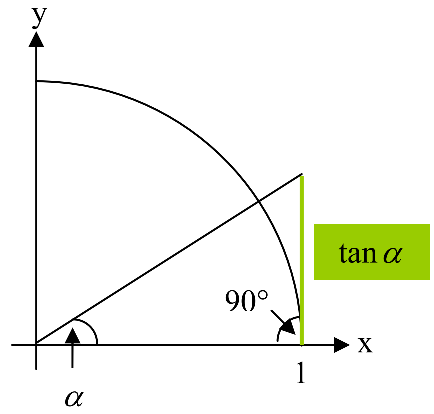


P(„mindestens zwei Jungen“) = $0{,}486 \cdot 0{,}514 \cdot 0{,}514 + 0{,}514 \cdot 0{,}486 \cdot 0{,}514 + 0{,}514 \cdot 0{,}514 \cdot 0{,}514 \approx 39{,}3\%$

Trigonometrie

Festlegung von Sinus, Kosinus und Tangens mit Hilfe des Einheitskreises:





Funktionswerte für besondere Winkel:

α in °	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Wichtige Beziehungen:

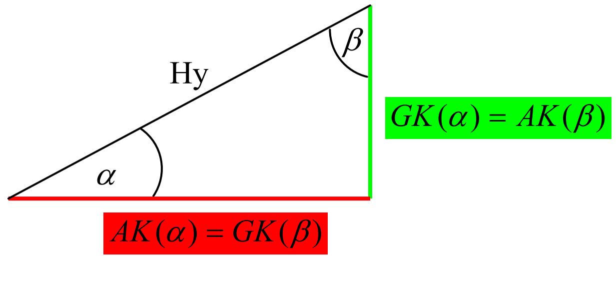
Für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90°)$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \; ; \; \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck:



$$\sin\alpha = \frac{GK(\alpha)}{Hy} \qquad \sin\beta = \frac{GK(\beta)}{Hy}$$

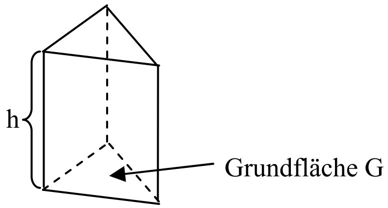
$$\cos\alpha = \frac{AK(\alpha)}{Hy} \qquad \cos\beta = \frac{AK(\beta)}{Hy}$$

$$\tan\alpha = \frac{GK(\alpha)}{AK(\alpha)} \qquad \tan\beta = \frac{GK(\beta)}{AK(\beta)}$$

Raumgeometrie

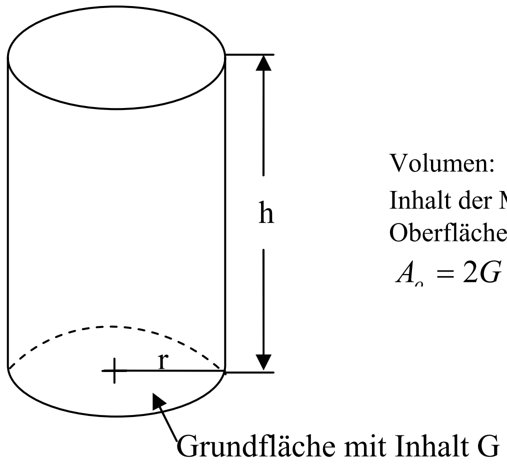
a) **Das Prisma**: Es entsteht durch die Parallelverschiebung eines beliebigen Vielecks.

<u>Beispiel</u>: gerades Dreikantprisma



<u>Allgemein gilt</u>: Volumen=Grundfläche mal Höhe

b) **Der Zylinder**: Er entsteht durch die Parallelverschiebung eines beliebigen Kreises.



Volumen: $V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

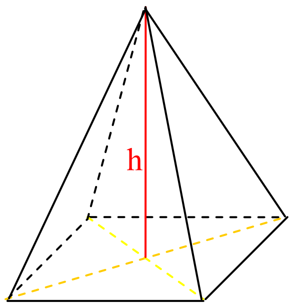
Inhalt der Mantelfläche: $M = 2r\pi \cdot h$

Oberflächeninhalt:

$$A_o = 2G + M = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h$$

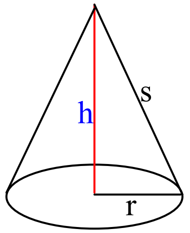
c) **Die Pyramide:** Sie entsteht, wenn man die Eckpunkte eines beliebigen Vielecks mit einem Punkt S außerhalb der Vielecksebene verbindet.

Beispiel: gerade Vierkantpyramide



Allgemein gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

d) **Der Kegel**:



$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot h$$

$$A_O = r^2 \pi + \pi r s$$