Lerninhalte	Fakten-Regeln-Beispiele

Symmetrie

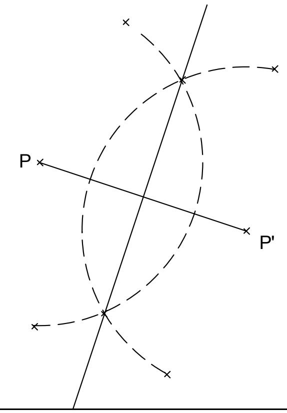
Eigenschaften der Achsensymmetrie:

- Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß.
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.
- Zueinander symmetrische Geraden sind parallel oder sie schneiden sich auf der Achse.

Wie konstruiert man den Bildpunkt P', wenn der Punkt P und die Spiegelachse gegeben sind?

- Zeichne einen Kreis um P, der die Achse in den Punkten A und B schneidet.
- Zeichne die Kreise $k(A\,;\overline{AP})$ und $k(B\,;\overline{BP})$, die sich in einem weiteren Punkt schneiden. Das ist der Bildpunkt P'.

Wie konstruiert man die Spiegelachse, wenn der Punkt P und der Bildpunkt P' gegeben sind?



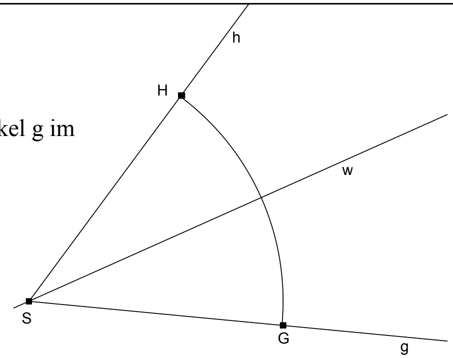
- Zeichne die Kreise $k(P\,;r)$ und $k(P'\,;r)$ mit $r > \frac{1}{2}\overline{PP'}$.
- Verbinde die Schnittpunkte beider Kreise.

Die entstandene Spiegelachse ist gleichzeitig **Mittelsenkrechte** auf [PP'].

Der Schnittpunkt der entstandenen Achse mit PP' ist der **Mittelpunkt** der Strecke [PP'].

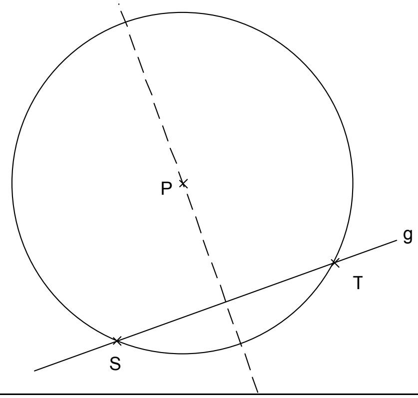
Wie konstruiert man die Winkelhalbierende?

- Zeichne einen Kreis um S mit beliebigem Radius, der den Schenkel g im Punkt G und den Schenkel h im Punkt H schneidet.
- Die Symmetrieachse zu G und H ist die Winkelhalbierende.



Wie konstruiert man das Lot l zu einer Geraden durch einen Punkt P?

- Zeichne einen Kreisbogen mit Mittelpunkt P, der die Gerade g zweimal schneidet. Diese Punkte heißen S und T.
- Die Mittelsenkrechte von [ST] ist das gesuchte Lot.



Eigenschaften der Punktsymmetrie:

- Zueinader symmetrische Strecken sind gleich lang und parallel.
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß.
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich nicht.

Wie konstruiert man das Symmetriezentrum Z zu zwei zueinander punktsymmetrischen Punkten P und P'?

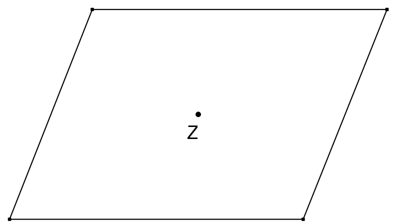
- Konstruiere den Mittelpunkt Z der Strecke $[PP']$.

Wie konstruiert man einen Spiegelpunkt zu A, wenn das Symmetriezentrum Z gegeben ist?

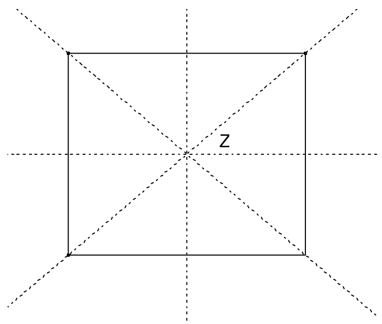
- Zeichne die Halbgerade $[AZ$.
- Zeichne den Kreis um Z mit $r = \overline{AZ}$.
- Der Kreis schneidet $[AZ$ in A'.

Zeichne ein punktsymmetrisches und ein achsensymmetrisches Viereck mit Angabe des Zentrums bzw. mit allen Symmetrieachsen.

z.B. Parallelogramm:

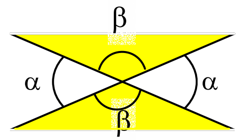


z.B. Rechteck



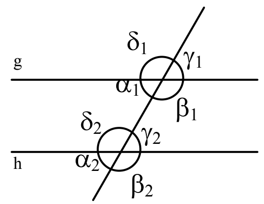
Winkelgesetze

Zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, nennt man eine **Geradenkreuzung**.



Nebeneinander liegende Winkel heißen **Nebenwinkel**, sie ergeben zusammen stets 180^0.
Gegenüberliegende Winkel heißen **Scheitelwinkel**. Sie sind gleich groß.

Doppelkreuzung:
Die Winkelpaare α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 sowie δ_1 und δ_2 heißen **Stufenwinkel** (F-Winkel).
α_1 und γ_2, β_1 und δ_2, γ_1 und α_2 sowie δ_1 und β_2 heißen **Wechselwinkel** (Z-Winkel).
α_1 und δ_2 sowie β_1 und γ_2 heißen **Nachbarwinkel** (Ergänzungswinkel, E-Winkel).
Stufen- und Wechselwinkel sind genau dann gleich groß, wenn die Geraden g und h parallel sind.
Nachbarwinkel ergänzen sich genau dann zu 180°, wenn g und h parallel sind.



Winkel bei Dreiecken und Vierecken:
Die Summe der (Innen-)Winkel ergibt in jedem Dreieck 180°, in jedem Viereck 360°.

Terme

Was sind Terme?

Terme sind sinnvolle Zusammenstellungen von Zahlen, Variablen, Rechenzeichen und Klammern.

Termarten und Beispiele:

- Summen: $T(b) = b + 5$, $T(a,c) = 2c + 7a$
- Differenzen: $T(b) = 2b - 6$
- Produkte $T(x,y) = x \cdot y$, $T(g,k,n) = g \cdot (2k-1) \cdot (n+7)$

Zur Berechnung von Termwerten werden die Variablen mit Zahlen bzw. Größen belegt:

Beispiel: $T(k) = k^2 + 1$ **Wertetabelle:**

k	-1	0	1	2
T(k)	2	1	2	5

Aufstellen von Termen:

Beispiel:

Bei einer Geburtstagsgesellschaft stößt jeder Gast mit jedem anderen Gast an. Wie oft erklingen die Gläser, wenn n Gäste geladen sind?

Lösung:
Jeder der n Gäste kann mit n-1 Gästen anstoßen. Da je zwei Gäste nur ein Gläserklingen erzeugen, ergibt sich $T(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ als Anzahl für das Erklingen von Gläsern.

Was sind gleichwertige (äquivalente) Terme?

Zwei Terme, die bei jeder möglichen Ersetzung der Variablen durch Zahlen jeweils den gleichen Termwert ergeben.

Beispiel: äquivalente Terme: $4ac + 8ab$ und $4a(c+2b)$

$5 \cdot a \cdot a \cdot a$ und $5 \cdot a^3$

nichtäquivalente Terme: $5b + a$ und $5(b+a)$

Termumformungen:

- Umformungen nach den gültigen Rechengesetzen (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, Klammerregeln siehe Jgst. 5)
- Klammern auflösen: Steht ein *Plus* vor der Klammer, kann man die Klammer ohne weiteres weglassen. Steht ein *Minus* vor der Klammer, lässt man die Klammer weg und kehrt gleichzeitig alle Rechenzeichen in der Klammer um.
  z.B. $x - (y^2 - 2x) + y^2 = x - y^2 + 2x + y^2$
- Summen werden vereinfacht, indem man gleichartige Summanden zusammenfasst.
  z.B. $x - y^2 + 2x + y^2 = x + 2x - y^2 + y^2 = 3x$
- Bei einer Summe ungleichartiger Terme , etwa $3a + 4a^2$, ist kein Zusammenfassen möglich.
- Bei einer Summe von Produkten werden zunächst die einzelnen Produkte vereinfacht. Dann werden die Summanden, in denen die gleichen Variablen mit jeweils derselben Potenz vorkommen, zusammengefasst.

z.B. $3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 - 4y^2 = 3x^2 + 7y^3 - 25x^2 - 4y^2 = -22x^2 + 7y^3 - 4y^2$

- Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multipliziert (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) und die Produkte addiert: **(a+b)·(c+d) = ac + ad + bc + bd**

z.B. $(2x + 3y)(3 - 4x) = 6x - 8x^2 + 9y - 12xy$

Systematisches Lösen von Gleichungen:

Mit Äquivalenzumformungen (die die Lösungsmenge nicht verändern) ermittelt man eine Gleichung, die die Lösung(en) leicht erkennen lässt.
Vorgehen:
- auf beiden Seiten den selben Term addieren bzw. subtrahieren
- auf beiden Seiten den selben Term multiplizieren bzw. durch den selben Term dividieren.

Beispiel:

6x+3	=	11+2x	| **-2x**
6x+3**-2x**	=	11+2x**-2x**	
4x+3	=	11	| **-3**
4x+3**-3**	=	11**-3**	
4x	=	8	| **:4**
x	=	2	

Daten, Diagramme und Prozentrechnung

Arithmetisches Mittel:

Das arithmetische Mittel (=Durchschnitt) einer Datenreihe erhält man, wenn man alle Werte addiert und den Summenwert dann durch die Anzahl der Werte dividiert.

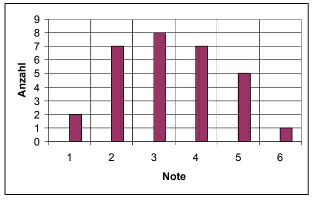
Beispiel: Notenverteilung bei einer Mathematikschulaufgabe

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	7	8	7	5	1

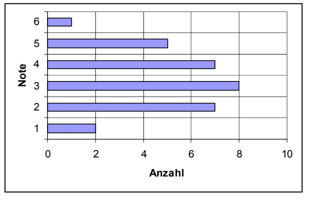
$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1) : 30 = \underline{\underline{3{,}3}}$

Verschiedene Diagrammtypen zu obigem Beispiel:

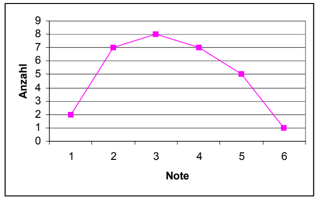
Säulendiagramm



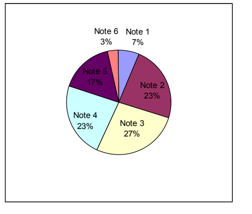
Balkendiagramm



Liniendiagramm



Kreisdiagramm



Grundgleichung der Prozentrechnung:

Prozentsatz mal **Grundwert** = **Prozentwert**

Beispiel:
Frisch geerntete Kartoffeln enthalten 78% Wasser.
Wie viel kg Kartoffeln enthalten etwa 1 l (=1 kg) Wasser?
$0{,}78 \cdot x = 1kg \qquad x = 1kg : 0{,}78 \qquad x \approx 1{,}28kg$

Kongruenz und Dreiecke

Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen deckungsgleich oder **kongruent.**
Sind zwei Figuren F und G **kongruent**, so schreibt man kurz**:** **F ≅ G**
In kongruenten Figuren sind einander entsprechende Winkel gleich groß und einander entsprechende Seiten gleich lang.

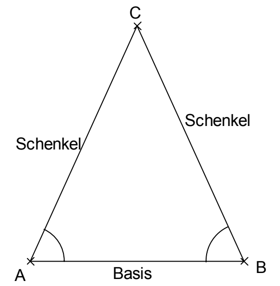
Kongruenzsätze für Dreiecke:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie
- in allen drei Seiten übereinstimmen (**SSS**)
- in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW** bzw. **SWW**)
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(SWS)**
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW**).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Besondere Dreiecke

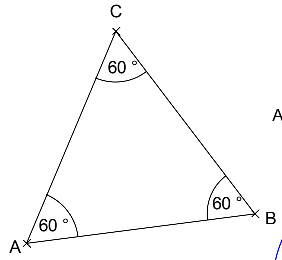
1. Das gleichschenklige Dreieck



Ein Dreieck mit **zwei gleich langen Seiten (Schenkel)** heißt gleichschenklig. Die dritte Seite heißt **Basis**.
Jede der folgenden Aussagen ist gleichwertig:

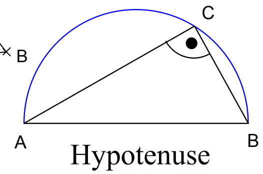
- Das Dreieck ist gleichschenklig.
- Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
- Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.

2. Das gleichseitige Dreieck



Ein Dreieck mit **drei gleich langen** Seiten heißt gleichseitig. Seine Winkel betragen **jeweils 60^0**.

3. Das rechtwinklige Dreieck



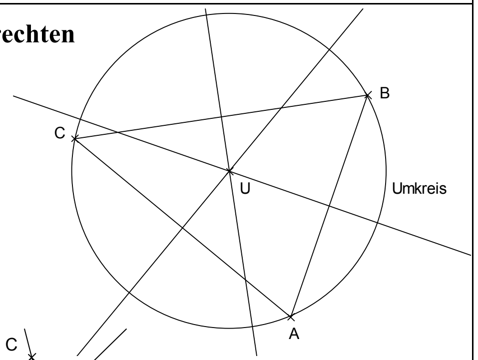
Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf dem Halbkreis über [AB] **(Thaleskreis)** liegt.
Die Schenkel des rechten Winkels sind die **Katheten**, die Gegenseite des rechten Winkels ist die **Hypotenuse** (längste Seite).

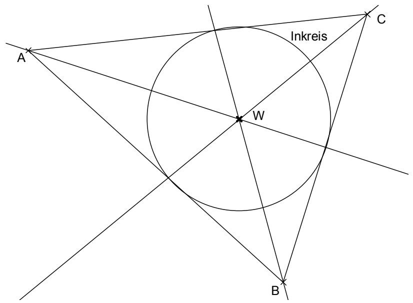
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Besondere Linien im Dreieck

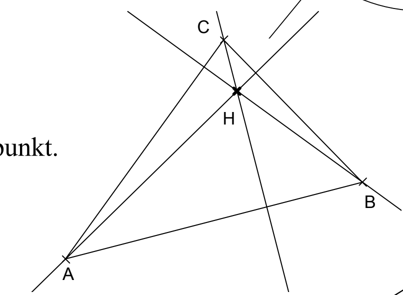
</td>
<td>

Jedes Dr ieck besitzt einen **Umkreis**. Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt U der **Mittelsenkrechten** zu den Dreiecksseiten.

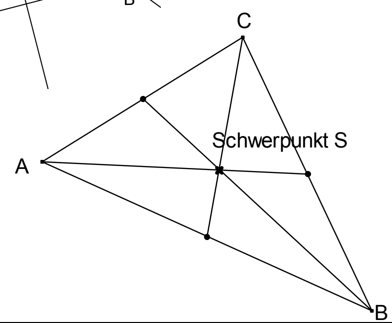




Jedes Dreieck besitzt einen **Inkreis**.
Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt W der **Winkelhalbierenden**.



In jedem Dreieck schneiden sich die **Höhen** in genau einem Punkt H, dem Höhenschnittpunkt.



Verbindet man in einem Dreieck einen Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenmitte, so entsteht eine **Seitenhalbierende**.
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im **Schwerpunkt** des Dreiecks.
Sie heißen deshalb auch **Schwerlinien**.

</td>
</tr>
</table>