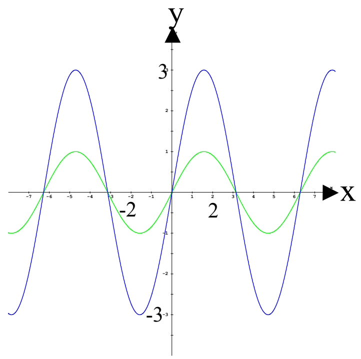
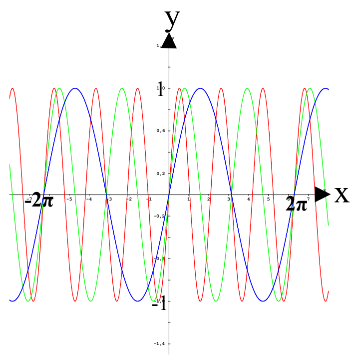
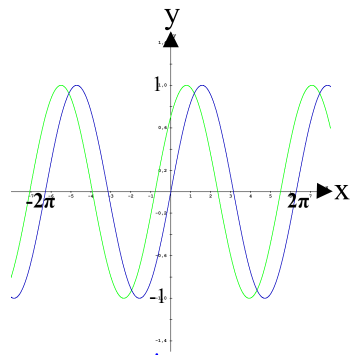
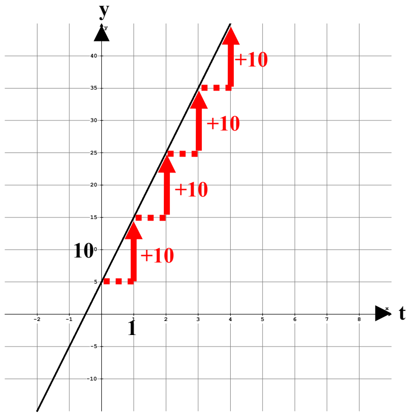
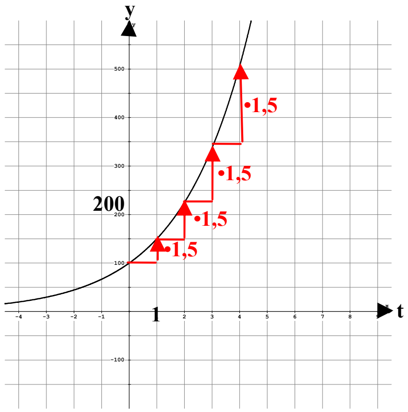
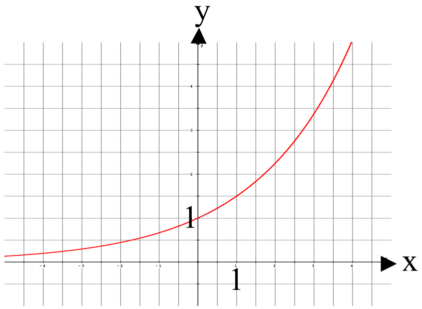
Lerninhalte	Fakten-Regeln-Beispiele	
Kreis - Kugel	Länge des Kreisbogens: $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$ Flächeninhalt des Kreissektors: $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$ Umrechnung ins Bogenmaß: $\alpha_B = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha_G$ Volumen der Kugel: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$ Oberflächeninhalt der Kugel: $A_O = 4 \cdot \pi r^2$	
Trigonometrie	Die allgemeine Sinusfunktion: $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ a: Amplitude  y = 1·sin x y = 3·sin x b: Frequenz  y=sin x y=sin (2x) y=sin (3x) c: Phasenverschiebung  y=sin x y=sin (x+π/4)	

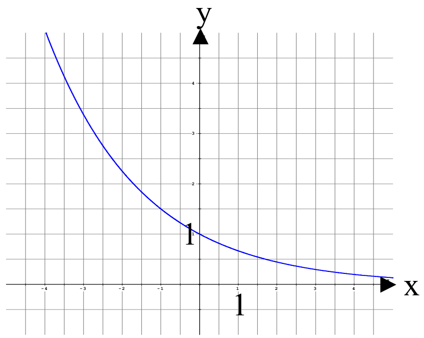
Exponential-funktion, Logarithmus	**Lineares Wachstum**(Beispiel):  Wachstum mit konstantem <u>Zuwachs</u> in gleichen (Zeit-) Schritten **Exponentielles Wachstum**(Beispiel):  Wachstum mit konstantem Wachstums<u>faktor</u> in gleichen (Zeit-) Schritten	

Exponential-funktion, Logarithmus

Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a^x ; a \in R^+$



$$\boxed{f : x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x}$$



$$\boxed{x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

Für a>1 nehmen die Funktionswerte mit wachsendem x zu. Der Graph steigt.

Für a<1 nehmen die Funktionswerte mit wachsendem x ab. Der Graph fällt.

Die Funktionswerte sind stets positiv. Sämtliche Graphen verlaufen durch den Punkt (0|1). Die x-Achse ist Asymptote des Graphen.

Spiegelt man den Graphen von $x \mapsto a^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graphen von $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Beim Übergang vom Graphen g: $x \mapsto a^x$ zum Graphen von f: $x \mapsto b \cdot a^x$ wird jede y-Koordinate eines Punktes des Graphen von g in der y-Richtung mit dem Faktor b gestreckt.

Der Graph der Logarithmusfunktion:

Spiegelt man den Graphen der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x ; a \in R^+$ an der Winkelhalbierenden des I. Quadranten, so erhält man den Graphen der Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_a x \; ; a \in R^+$

Exponential-funktion, Logarithmus	**<u>Rechengesetze für Logarithmen</u>:** $(u>0,\ v>0,\ a>0,\ a\neq 1)$: Gesetz: $\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v$ — Beispiel: $\log_2(32\cdot 8)=\log_2 32+\log_2 8=5+3=8$ Gesetz: $\log_a(u:v)=\log_a u-\log_a v$ — Beispiel: $\log_2(32:8)=\log_2 32-\log_2 8=5-3=2$ Gesetz: $\log_a u^x=x\cdot\log_a u$ — Beispiel: $\log_2 32^4=4\cdot\log_2 32=4\cdot 5=20$ Umrechnungsformel: $\log_a u=\frac{\lg u}{\lg a}$. Dabei gilt: $\lg u:=\log_{10} u$ **<u>Exponenzialgleichungen</u>:** 1. <u>Lösungsmöglichkeit</u>: Tritt die Variable als Exponent auf, so lässt sich die Gleichung oft durch Logarithmieren lösen. Beispiel: $6\cdot 1{,}4^x=2{,}5\cdot 0{,}8^x$ $\lg(6\cdot 1{,}4^x)=\lg(2{,}5\cdot 0{,}8^x)$ $\lg 6+x\cdot\lg 1{,}4=\lg 2{,}5+x\cdot\lg 0{,}8$ $x\cdot\lg 1{,}4-x\cdot\lg 0{,}8=\lg 2{,}5-\lg 6$ $x\cdot(\lg 1{,}4-\lg 0{,}8)=\lg 2{,}5-\lg 6$ $x=\frac{\lg 2{,}5-\lg 6}{\lg 1{,}4-\lg 0{,}8}\approx -1{,}56$ 2. <u>Lösungsmöglichkeit</u>: Substitution Beispiel: $5\cdot 5^x+5^{-x}=6$ $u:=5^x$ $5u+u^{-1}=6\Leftrightarrow 5u^2+1=6u\Leftrightarrow 5u^2-6u+1=0$ $u_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 5\cdot 1}}{2\cdot 5}\Rightarrow u_1=1;\ u_2=\frac{1}{5}$ $1=5^x\Rightarrow x_1=0$ $\frac{1}{5}=5^x\Rightarrow x_2=-1$ Die Probe zeigt, dass beide x-Werte Lösungen sind.	

Gesetz:	Beispiel:
$\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v$	$\log_2(32\cdot 8)=\log_2 32+\log_2 8=5+3=8$
$\log_a(u:v)=\log_a u-\log_a v$	$\log_2(32:8)=\log_2 32-\log_2 8=5-3=2$
$\log_a u^x=x\cdot\log_a u$	$\log_2 32^4=4\cdot\log_2 32=4\cdot 5=20$

Stochastik

<u>Vierfeldertafel</u>: (Beispiel)
Beim Lotto werden sechs aus 49 Zahlen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Zahl weder durch 2 noch durch 7 teilbar?

<u>Lösung</u>:
Ereignis G: „Zahl ist gerade.“ Ereignis S: „Zahl ist durch 7 teilbar.“
Tipp: Zuerst die Vierfeldertafel mit Anzahlen; dann die Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten aufstellen.

	G	$\overline{G}$	
S	3	4	7
$\overline{S}$	21	21	42
	24	25	49

Zeilensummen

Spaltensummen

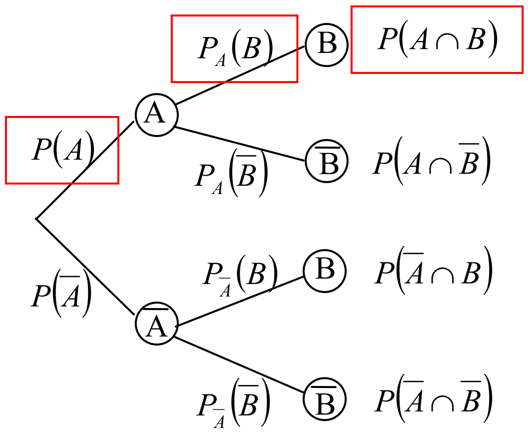
	G	$\overline{G}$	
S	$\frac{3}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{7}$
$\overline{S}$	$\frac{3}{7}$	$\boxed{\frac{3}{7}}$	$\frac{6}{7}$
	$\frac{24}{49}$	$\frac{25}{49}$	1

Antwort:

Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{7}$ ist die gezogene Zahl weder durch 2 noch durch 7 teilbar.

Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeit:



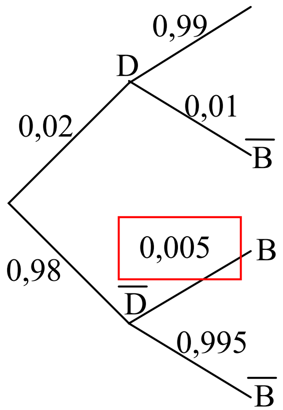
Sind A und B Ereignisse eines Zufalls-experiments mit $P(A) \neq 0$, so versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Bedingung des Eintretens von A.

Es gilt: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Beispiel:

Bei der Herstellung eines elektronischen Bauteils ist bekannt, dass der Ausschuss 2% beträgt. Bei einem Prüfverfahren werden defekte Bauteile mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% erkannt. Es passiert jedoch auch, dass das Prüfverfahren fälschlicherweise intakte Bauteile beanstandet. Mit 99,5% Wahrscheinlichkeit wird ein intaktes Bauteil nicht beanstandet.

a) Mit welcher WS wird ein intaktes Bauteil beanstandet?
b) Mit welcher WS ist ein Bauteil defekt, wenn es beanstandet wird?



Zu a)

$$\boxed{P_{\overline{D}}(B) = 0{,}005 = 0{,}5\%}$$

Zu b)

$$P_B(D) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{P(D) \cdot P_D(B)}{P(D) \cdot P_D(B) + P(\overline{D}) \cdot P_{\overline{D}}(B)}$$

$$= \frac{0{,}02 \cdot 0{,}99}{0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}005} \approx 80{,}2\%$$

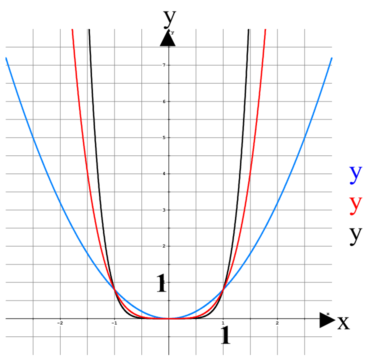
Ganzrationale Funktionen

<u>Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten</u>:

Darunter versteht man Funktionen mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto a \cdot x^n$ ($n \in N$). n ist der <u>Grad</u> der Potenzfunktion.

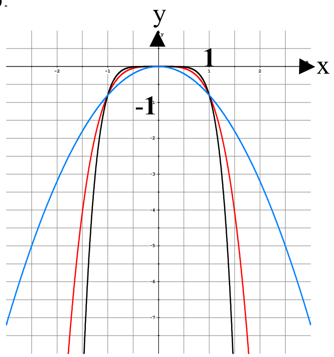
Gerade Exponenten:
Die Graphen sind achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

a>0:
Für x<0 nehmen mit wachsenden x-Werten die y-Werte ab, für x>0 zu.



$y = 0{,}8x^2$
$y = 0{,}8x^4$
$y = 0{,}8x^6$

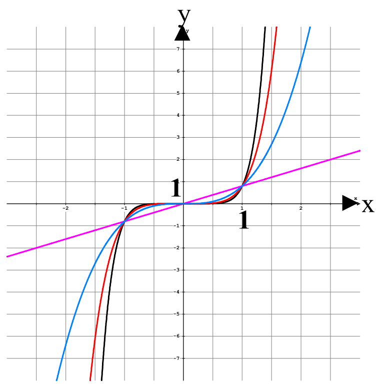
a<0:
Für x<0 nehmen mit wachsenden Funktionswerten die y-Werte zu, für x>0 ab.



$y = -0{,}8x^2$
$y = -0{,}8x^4$
$y = -0{,}8x^6$

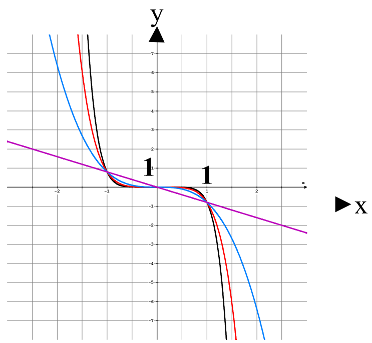
Ungerade Exponenten:
Die Graphen sind punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

a>0:
Mit wachsenden x-Werten nehmen die Funktionswerte zu.



$y = 0{,}8x^3$
$y = 0{,}8x^5$
$y = 0{,}8x^7$
$y = 0{,}8x$

a<0:
Mit wachsenden x-Werten nehmen die Funktionswerte ab.



$y = -0{,}8x^3$
$y = -0{,}8x^5$
$y = -0{,}8x^7$
$y = -0{,}8x$

Ganzrationale Funktionen

Begriff des **Polynoms**:
Terme, die aus Summen von Potenzen (mit Exponenten aus N_0), derselben Variablen und zugehörigen Koeffizienten bestehen, nennt man Polynome.

Beispiele:

a) $-5x^6 + 3x^4 + x^3 - x + 6$

b) $2x^{18} + 2x^9 - \frac{1}{2}x$

Der höchste in einem Polynom bei einer Variable vorkommende Exponent heißt Grad des Polynoms.

Beispiele:

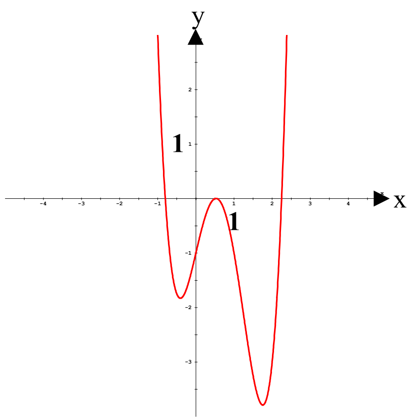
Zu a) Der Grad beträgt 6 wegen x^6.
Zu b) Der Grad beträgt 18.

Begriff der **ganzrationalen Funktion**:
Darunter versteht man eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom ist.

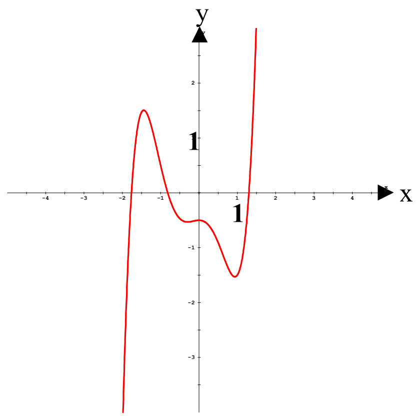
Beispiel:

Bei $p: x \mapsto 2x^{18} + 2x^9 - \frac{1}{2}x$ handelt es sich um eine ganzrationale Funktion vom Grad 18.

Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion für betragsmäßig große x-Werte (Beispiele):



$x \mapsto \boxed{2x^4} - 5x^3 + 3x - 1$

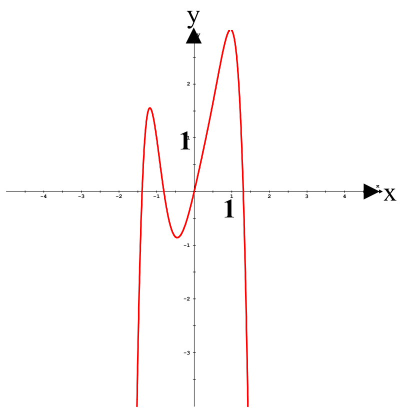


$x \mapsto \boxed{x^5} + x^4 - 2x^3 - x^2 - 0{,}5$

Fortsetzung: Nächste Seite

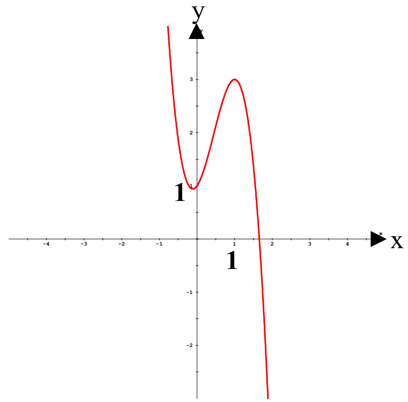
Ganzrationale Funktionen

$$x \mapsto \boxed{-2x^6} + 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x$$



Ist der höchste vorkommende Exponent gerade, so verläuft der Graph „von oben nach oben“ oder „von unten nach unten“.

$$x \mapsto \boxed{-3x} + 4x^2 + x + 1$$



Ist der höchste vorkommende Exponent ungerade, so verläuft der Graph „von unten nach oben“ oder „von oben nach unten“.

<u>Das Ermitteln von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen</u>:

Beispiel: $p: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Schritt: Finden einer Nullstelle durch systematisches Probieren Man erhält z.B. $x = 2$.

2. Schritt: Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \qquad -4x^2 + 11x \\ \qquad \underline{-(-4x^2 + 8x)} \\ \qquad\qquad\qquad 3x - 6 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-(3x - 6)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Dividiere x^3 durch x .

Multipliziere das Ergebnis x^2 mit $x - 2$.

Subtrahiere $x^3 - 2x^2$ von $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

3. Schritt: Nullsetzen des Ergebnisterms der Polynomdivision.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$$

Ergebnis: Die Nullstellen lauten: $x_0 = 2; x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Der Funktionsterm von p zerfällt in Linearfaktoren: $p: x \mapsto (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

Fortsetzung: nächste Seite

Funktionen und ihre Graphen

Man spricht von einer <u>k-fachen Nullstelle</u>, wenn in der vollständig faktorisierten Form des Funktionsterms der entsprechende Linearfaktor k-mal vorkommt.

Beispiel:

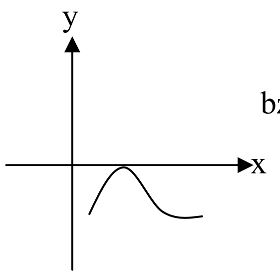
$f : x \mapsto 2 \cdot (x - 0)^1 (x - (-2))^2 \cdot (x - 1)^3$

f hat bei x = 0 eine einfache, bei x = -2 eine doppelte und bei x = 1 eine dreifache Nullstelle

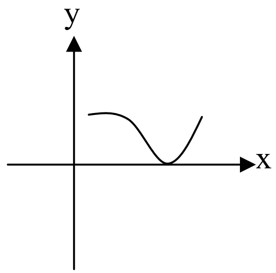
<u>Vielfachheit und Graph</u>

Bei gerader Vielfachheit einer Nullstelle überquert der Graph die x-Achse bei dieser Nullstelle <u>nicht</u>.

Mögliche Graphenverläufe:

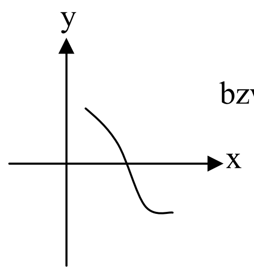


bzw.

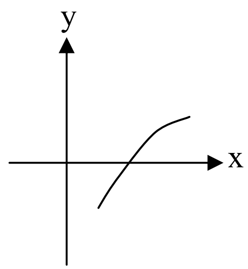


Bei ungerader Vielfachheit einer Nullstelle überquert de Graph die x-Achse bei dieser Nullstelle.

Mögliche Graphenverläufe:



bzw.



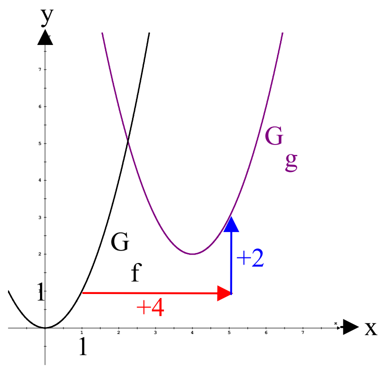
<u>Verschieben von Funktionsgraphen</u>:

Sind zwei Funktionen f und g gegeben und gilt

$g(x)=f(x + a) + b$,

so entsteht der Graph von g aus dem Graphen von f durch Verschiebung um –a in x-Richtung
(a>0: nach links, a<0: nach rechts),
und um b in y-Richtung
(b>0: nach oben, b<0: nach unten).

$g(x)=f(x+(-4))+2$



Funktionen und ihre Graphen	see below	

Funktionen und ihre Graphen

Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen:

Gilt für zwei Funktionen f und g die Gleichung $g(x) = k \cdot f(x)$ mit $k > 0$, so ist der Graph von g gegenüber demjenigen von f in y-Richtung von der x-Achse aus mit dem Streckungsfaktor k **gestreckt**.

Der Graph der Funktion g mit

$$g(x) = -f(x)$$

geht aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der x-Achse hervor.

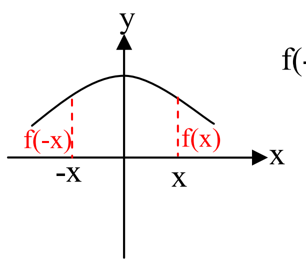
Gilt für zwei Funktionen f und g die Gleichung $h(x) = f(k \cdot x)$ mit $k > 0$, so ist der Graph von h gegenüber demjenigen von f in x-Richtung von der y-Achse aus mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{k}$ **gestreckt**.

Der Graph der Funktion h mit

$$h(x) = f(-x)$$

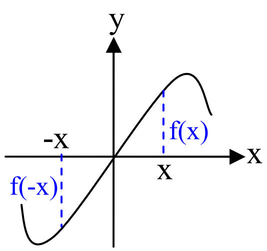
geht aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der y-Achse hervor.

Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse



f(-x)=f(x)

Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs



f(-x)=-f(x)

Grenzwerte im Unendlichen:

Kommen die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl a beliebig nahe, so nennt man a den Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich ($x \to +\infty$).

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$

Die Gerade y = a ist waagerechte Asymptote des Graphen von f.

Entsprechend ist der Grenzwert für $x \to -\infty$ definiert.

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ existiert nicht, da die Funktionswerte zwischen -1 und +1 schwanken.